莱布尼茨公式、莱布尼茨三角、二项式定理

小圆滚滚

1 莱布尼茨公式

$$
\begin{aligned}
(u\cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}v\cdot nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}
\end{aligned}
$$

2 二项式定理

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}
\end{aligned}
$$

其中每个$\binom{n}{k}$为一个称作二项式系数的特定正整数，其等于$\frac{n!}{k!(n-k)!}$。这个公式也称**二项式公式**或**二项恒等式**。

二项式的矩阵形式：

$$
(a+b)^n = [a^0 \cdots a^n]\begin{bmatrix} C_n^0 & & \\ & \ddots & \\ & & C_n^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1 \\ & \vdots & \\ 1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^0 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}
$$

3 对比产生的过程，可以看出形式相同，原理相通

定义两个算子: $\square$和$\triangle$ 。

$$
\begin{aligned}
(\square+\triangle)^2 &= (\square+\triangle)\times(\square+\triangle) \\
&= \square(\square+\triangle)+\triangle(\square+\triangle) \\
&= \square^2 + 2\square\triangle + \triangle^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\square\cdot\triangle)'' &= (\square'\triangle + \square\triangle')' \\
&= (\square'\triangle)' + (\square\triangle')' \\
&= \square''\triangle + \square'\triangle' + \square'\triangle' + \square\triangle'' \\
&= \square''\triangle + 2\square'\triangle' + \square\triangle''
\end{aligned}
$$

初看Leibniz公式与二项式定理很像，但是为什么还是值得思考的。如果不是两个函数相乘而是很多个。那么，就可以定义很多类似于□和△的东西，推广出来应该就是广义二项式定理。

容易发现，导数的线性性质在这里表现为乘法的分配律。

区别在于二项式定理中□的0次方是1，而莱布尼茨公式中□的0阶导数就是□本身。