21 变分法初步

21.1 泛函的概念

泛函, 简单地说, 就是以整个函数为自变量的函数.

Example 21.1 *设在 x, y 平面上有一簇曲线 $y(x)$, 其长度为*

$$L = \int_C \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

显然, $y(x)$ 不同, L 也不同, 即 L 的数值依赖于整个函数 $y(x)$ 而改变. L 和函数 $y(x)$ 之间的这种依赖关系, 称为泛函关系. 类似的例子还有闭合曲线围成的面积, 平面曲线绕固定轴而生成的旋转体体积或表面积, 等等.

泛函 *设对于(某一函数集合内的)任意一个函数 $y(x)$, 有另一个数 $J[y]$ 与之对应, 则称 $J[y]$ 为 $y(x)$ 的泛函.*

这里的函数集合, 即泛函的定义域, 通常包含要求 $y(x)$ 具有连续的二阶导数, 并且满足一定的边界条件. 这样的 $y(x)$ 称为 **可取函数**.

泛函不同于复合函数

例如

$g = g(f(x))$ 给定一个 x 值, 仍然是有一个 g 值与之对应;

泛函 则必须给出某一区间上的函数 $y(x)$, 才能得到一个泛函值$J[y]$. 定义在同一区间上的函数不同, 泛函值当然不同.

为了强调泛函值 $J[y]$ 与函数 $y(x)$ 之间的依赖关系, 常常又把函数 $y(x)$ 称为变量函数.

泛函的形式可以多种多样, 但本书中只限于用积分

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,\, y,\, y')\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

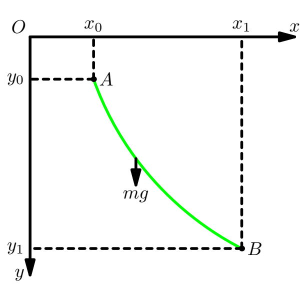
定义的泛函, 其中的 F 是它的宗量 x, $y(x)$ 及 $y'(x)$ 的已知函数, 且具有连续的二阶偏导数. 如果变量函数是二元函数 $u(x,y)$, 则泛函为

$$J[u] = \iint_S F\left(x,\, y,\, u,\, u_x,\, u_y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2}$$

其中 $u_x \equiv \partial u/\partial x$, $u_y \equiv \partial u/\partial y$. 对于更多个自变量的多元函数, 也可以有类似的定义.

Example 21.2 (捷线问题) *如图所示, 在重力作用下, 一质点从 (x_0, y_0) 点沿平面曲线 $y(x)$ 无摩擦地自由下滑到 (x_1, y_1) 点, 则所需要的时间就是 $y(x)$ 的泛函.*

$$T = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g(y_0-y)}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}}\, \mathrm{d}x \tag{3}$$



弦的横振动问题

设在弦上隔离出足够短的一段弦, 则该段弦的动能 E_k 和势能 E_p 分别为

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\rho\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2, \quad E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}T\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

其中 $u(x,t)$ 是弦的横向位移, ρ 是弦的线密度, T 是张力. 这样, 弦的作用量

$$S = \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{4}$$

也是位移 $u(x,t)$ 的泛函. 这里的

$$L = \int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

称为拉格朗日量(Lagrangian), 而被积函数

$$\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]$$

称为拉格朗日量密度.

21.2 泛函的极值

泛函极值的概念和函数极值非常类似. 例如, "当变量函数为 $y(x)$ 时, 泛函 $J[y]$ 取极小值" 的含义就是: 对于极值函数 $y(x)$ 及其 "附近" 的变量函数 $y(x)+\delta y(x)$, 恒有

$$J[y+\delta y] \geq J[y]. \tag{5}$$

所谓 $y(x)+\delta y(x)$ 在 $y(x)$ 的 "附近", 指的是它们的差 $\delta y(x)$ (称为函数$y(x)$的**变分**)满足

- $|\delta y(x)| < \epsilon$;
- 有时还要求 $|(\delta y)'(x)| < \epsilon$.

欧拉-拉格朗日方程

可以仿照函数极值必要条件的导出办法, 导出泛函取极值的必要条件. 假定, 所考虑的变量函数均通过固定的两个端点 $y(x_0)=a$, $y(x_1)=b$, 即

$$\delta y(x_0) = 0, \qquad \delta y(x_1) = 0. \tag{6}$$

现在, 考虑泛函的差值

$$J[y+\delta y] - J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\left[F\left(x,\, y+\delta y,\, y'+(\delta y)'\right) - F(x,\, y,\, y')\right]\mathrm{d}x, \tag{7}$$

当函数的变分 $\delta y(x)$ 足够小时, 可以将被积函数在极值函数附近作泰勒展开, 于是, 有

$$\begin{aligned}&J[y+\delta y] - J[y]\\ =&\int_{x_0}^{x_1}\left\{\left[\delta y\frac{\partial}{\partial y} + (\delta y)'\frac{\partial}{\partial y'}\right]F\right.\\ &\qquad\left. + \frac{1}{2!}\left[\delta y\frac{\partial}{\partial y} + (\delta y)'\frac{\partial}{\partial y'}\right]^2 F + \cdots\right\}\mathrm{d}x\\ =&\delta J[y] + \frac{1}{2!}\delta^2 J[y] + \cdots,\end{aligned}$$

其中

$$\delta J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\right] \mathrm{d}x, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\delta^2 J[y] &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y\frac{\partial}{\partial y} + (\delta y)'\frac{\partial}{\partial y'}\right]^2 F\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\delta y(\delta y)' + \frac{\partial^2 F}{\partial {y'}^2}(\delta y)'^2\right] \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{9}$$

分别是泛函 $J[y]$ 的一级变分和二级变分. 泛函 $J[y]$ 取极小值的必要条件是泛函的一级变分为0,

$$\delta J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y\,\frac{\partial F}{\partial y} + (\delta y)'\,\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\,\mathrm{d}x = 0. \tag{10}$$

对于泛函 $J[y]$ 取极大值的情形, 也可以类似地讨论, 并且也会得到同样形式的必要条件.

将(10)式的积分中的第二项分部积分, 同时考虑到边界条件(6), 就有

$$\begin{aligned}\delta J[y] = \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y\,\frac{\partial F}{\partial y} - \delta y\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\mathrm{d}x \\ = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\,\delta y\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

由于 δy 的任意性, 我们就可以得到

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{11}$$

这个方程称为**欧拉-拉格朗日方程**, 它是泛函 $J[y]$ 取极小值的必要条件的微分形式. 一般说来, 这是一个二阶常微分方程.

在导出欧拉-拉格朗日方程时, 需要用到下面的引理:

Theorem 21.1 (变分学基本引理) *设 $\phi(x)$ 是连续函数, $\eta(x)$ 具有连续的二阶导数, 并且满足 $\eta(x)\big|_{x=x_0} = \eta(x)\big|_{x=x_1} = 0$, 若对于任意 $\eta(x)$,*

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi(x)\,\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

均成立, 则必有 $\phi(x) \equiv 0$.

哈密顿原理

设质点在有势力场中沿路径 $q = q(t)$ 由 $(t_0,\, q(t_0))$ 点运动到 $(t_1,\, q(t_1))$ 点, 它的作用量是

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t,\, q,\, \dot{q})\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

其中 q 和 $\dot{q}$ 是描写质点运动的广义坐标和广义动量, $L = T - V$ 是动能 T 和势能 V 之差, 称为拉格朗日量. 哈密顿原理告诉我们, 在一切(运动学上允许的)可能路径中, 真实运动的(即由力学规律决定的)路径使作用量 S 取极值. 根据上面的讨论可知, 作用量 S 取极值的必要条件的积分形式和微分形式分别是

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta\dot{q}\right]\,\mathrm{d}t = 0 \tag{13}$$

和

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{14}$$

在给定的有势力场中, 写出拉格朗日量 L 的具体形式, 代入(14)式, 就会发现, 它和牛顿力学的动力学方程完全一样.

两种常见的特殊情形

一种是泛函中的 $F = F(x, y')$ 不显含 y, 这时的欧拉-拉格朗日方程就是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

所以, 立即就得到它的首次积分

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{常量}\, C. \tag{15}$$

另一种是泛函中的 $F = F(y, y')$ 不显含 x, 容易证明,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F\right] = y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y}\,y' - \frac{\partial F}{\partial y'}y'' = -y'\,\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\partial F}{\partial y'}\right],$$

所以, 这时的欧拉-拉格朗日方程也可以有首次积分

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = \text{常量}\, C. \tag{16}$$

把这个结果应用到哈密顿原理中, 如果拉格朗日量 L 不显含 t, 则有

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \text{常量}\, C, \tag{17}$$

这就是能量守恒.

捷线问题 这里

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}$$

代入欧拉-拉格朗日方程, 可得 y 所满足的微分方程. 因为这时 F 与 x 无关, 得

$$\begin{aligned}\text{常量}\, C &= y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F \\ &= \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2g(y_0-y)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2g(y_0-y)}}\end{aligned}$$

所以

$$y'^2 + 1 = \frac{1}{C^2}\frac{1}{2g(y_0 - y)}$$

设

$$\begin{aligned}y_0 - y &= \frac{1}{2gC^2}\sin^2\theta \\ y' &= -\frac{1}{2gC^2}\sin(2\theta)\theta'\end{aligned}$$

θ 满足方程为

$$\theta' = \pm\frac{gC^2}{\sin^2\theta}$$

或

$$gC^2\mathrm{d}x = \pm\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

解为 ($\theta_0 = 0$)

$$x - x_0 = \pm\frac{1}{2gC^2}(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta)$$

□

二元函数的情形

设有二元函数$u(x,\,y)$, $(x,\,y)\in S$, 在此基础上可定义泛函

$$J[u] = \iint_S F(x,\,y,\,u,\,u_x,\,u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{18}$$

仍然约定, $u(x,\,y)$ 在 S 的边界 Γ上的数值给定, 即

$$u\big|_\Gamma \text{ 固定}. \tag{19}$$

首先, 当然要计算

$$\begin{aligned}&J[u{+}\delta u]{-}J[u]\\=&\iint_S F\left(x,\,y,\,u{+}\delta u,\,(u{+}\delta u)_x,\,(u{+}\delta u)_y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\-&\iint_S F(x,\,y,\,u,\,u_x,\,u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}&J[u{+}\delta u]{-}J[u]\\=&\iint_S\left[\delta u\,\frac{\partial}{\partial u}+(\delta u)_x\,\frac{\partial}{\partial u_x}+(\delta u)_y\,\frac{\partial}{\partial u_y}\right]F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\+&\frac{1}{2!}\iint_S\left[\delta u\,\frac{\partial}{\partial u}+(\delta u)_x\,\frac{\partial}{\partial u_x}+(\delta u)_y\,\frac{\partial}{\partial u_y}\right]^2F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\+&\cdots,\end{aligned}$$

于是, 泛函 $J[u]$ 取极值的必要条件就是泛函的一级变分为0,

$$\begin{aligned}\delta J[u] =& \iint_S\left[\delta u\,\frac{\partial F}{\partial u}+(\delta u)_x\,\frac{\partial F}{\partial u_x}+(\delta u)_y\,\frac{\partial F}{\partial u_y}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\iint_S\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\Big)-\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\Big)\right]\delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&+\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\,\delta u\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\,\delta u\Big)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&0.\end{aligned} \tag{20}$$

利用公式

$$\iint_S\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Gamma\Big(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\Big),$$

取 $Q=\dfrac{\partial F}{\partial u_x}\delta u,\ P=-\dfrac{\partial F}{\partial u_y}\delta u$, 就能将上面的结果化为

$$\delta J[u]=\iint_S\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial F}{\partial u_y}\right]\delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$+\int_\Gamma\left[-\frac{\partial F}{\partial u_x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial u_y}\,\mathrm{d}y\right]\delta u.$$

根据边界条件, $\delta u\big|_\Gamma=0$, 可知上式右端第二项的线积分为0, 所以

$$\delta J[u]=\iint\limits_S\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial F}{\partial u_y}\right]\delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=0.$$

再利用 δu 的任意性, 就可以导出

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial F}{\partial u_y}=0, \tag{21}$$

这就是二元函数情形下, 泛函

$$J[u]=\iint_S F(x,\,y,\,u,\,u_x,\,u_y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

取极值的必要条件的微分形式(欧拉-拉格朗日方程).

Example 21.3 *把这个结果应用到弦的横振动问题上, 就得到使作用量*

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

取极值的必要条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{T}{\rho}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{22}$$

正是我们在第12章导出的弦的横振动方程.

在 n 个自变量的情形下, 可以导出泛函

$$\int\cdots\int F(x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n,\,u,\,u_{x_1},\,u_{x_2},\,\cdots,\,u_{x_n})$$

$$\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\cdots\mathrm{d}x_n$$

取极值的必要条件.

下面以一元函数为例, 总结一下变分的几条简单运算法则.

1. 只考虑函数的一级变分.
2. 变分运算是线性运算
$$\delta(\alpha\,F+\beta\,G)=\alpha\,\delta F+\beta\,\delta G, \tag{23}$$
其中 α 和 β 是常数.
3. 函数乘积的变分法则
$$\delta(FG)=(\delta F)\,G+F\,(\delta G). \tag{24}$$

4. 变分运算和微分或微商运算可交换次序

$$\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x}\quad \text{即}\quad \delta y'=(\delta y)'. \tag{25}$$

5. 变分运算和积分(微分的逆运算)也可以交换次序,

$$\delta\int_a^b F\,\mathrm{d}x=\int_a^b(\delta F)\,\mathrm{d}x. \tag{26}$$

6. 复合函数的变分运算, 其法则和微分运算完全相同, 只要简单地将微分运算中的 "d" 换成 "δ" 即可. 例如,

$$\delta F(x,\,y,\,y')=\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y'. \tag{27}$$

这里注意, 引起 F 变化的原因, 是函数 y 的变分, 而非自变量 x.

这些运算法则, 可以毫不困难地推广到多元函数的情形.

作为完整的泛函极值问题, 在列出泛函取极值的必要条件、即欧拉-拉格朗日方程后, 还需要在给定的定解条件下求解微分方程, 才有可能求得极值函数.

Note 这里需要注意, 欧拉-拉格朗日方程只是泛函取极值的必要条件, 并不是充分必要条件. 在给定的定解条件下, 欧拉-拉格朗日方程的解到底是不是要求的极值函数, 还需要进一步加以甄别.

21.3 泛函的条件极值

拉格朗日乘子法

要求泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\,y,\,y')\,\mathrm{d}x \tag{28}$$

在边界条件

$$y(x_0)=a,\qquad y(x_1)=b \tag{29}$$

以及约束条件

$$J_1[y]\equiv\int_{x_0}^{x_1}G(x,\,y,\,y')\,\mathrm{d}x=C \tag{30}$$

下的极值, 常采用拉格朗日乘子法. 定义

$$J_0[y]=J[y]-\lambda J_1[y], \tag{31}$$

其中拉格朗日乘子 λ 为待定常数, 仍将 δy 看成是独立的, 于是泛函 $J_0[y]$ 在边界条件(29)下取极值的必要条件就是

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'}\Big)(F-\lambda G)=0. \tag{32}$$

由微分方程(32)、边界条件(29)以及约束条件(30), 就可以求出拉格朗日乘子的值 λ、条件极值函数$y=y(x)$.

Example 21.4 *求泛函*

$$I[y]=\int_0^1 xy'^2\,\mathrm{d}x \tag{33}$$

在边界条件

$$y(0)\ \text{有界},\qquad y(1)=0 \tag{34}$$

和约束条件

$$\int_0^1 xy^2\,\mathrm{d}x=1 \tag{35}$$

下的极值曲线.

Solution 采用上面描述的拉格朗日乘子法, 可以得到必要条件

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'}\right)\left(x{y'}^2-\lambda\, xy^2\right)=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\lambda\, x\, y=0. \tag{36}$$

此方程及齐次的边界条件(34)即构成一个本征值问题, 它的本征值

$$\lambda_i=\mu_i^2 \qquad i=1,2,3,\cdots \tag{37}$$

μ_i 是零阶贝塞耳函数 $\mathrm{J}_0(x)$ 的第 i 个正零点.

而极值函数就是相应的本征函数

$$y_i(x)=C_i\,\mathrm{J}_0\left(\mu_i x\right).$$

常量 C_i 可以由约束条件定出. 因为

$$C_i^2\int_0^1 x\,\mathrm{J}_0^2\left(\mu_i x\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}C_i^2\mathrm{J}_1^2(\mu_i)=1,$$

所以 $C_i=\sqrt{2}/\mathrm{J}_1(\mu_i)$. 这样就求出了极值函数

$$y_i(x)=\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0(\mu_i x). \tag{38}$$

值得注意, 这里由于拉格朗日乘子的引进, 在欧拉-拉格朗日方程出现了待定参量, 和齐次边界条件组合在一起, 就构成本征值问题. 而作为本征值问题, 它的解, 本征值和本征函数, 有无穷多个.

这无穷多个本征函数就是泛函的极值函数. 而且, 这无穷个本征值正好也就是泛函的极值. 这是因为, 将方程乘以极值函数 $y(x)$, 再积分, 就有

$$\lambda\int_0^1 x\,y^2\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 y\left(x\,y'\right)'\mathrm{d}x= \\ -\,y\cdot x\,y'\Big|_0^1+\int_0^1 x\,{y'}^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,{y'}^2\,\mathrm{d}x,$$

根据约束条件, 就能得到

$$\lambda=\int_0^1 x\,{y'}^2\,\mathrm{d}x. \tag{39}$$

□

21.4 微分方程定解问题和本征值问题的变分形式

- 在前两节中, 读者看到, 泛函取极值的必要条件的微分形式(欧拉-拉格朗日方程)是常微分方程或偏微分方程, 它和变量函数的定解条件结合起来, 就构成常微分方程或偏微分方程的定解问题.
- 对于泛函的条件极值问题, 其必要条件中出现待定参量(拉格朗日乘子), 它和齐次边界条件结合起来, 就构成微分方程本征值问题.
- 这一节将研究它的反问题:如何将微分方程的定解问题或本征值问题转化为泛函的极值或条件极值问题, 即如何将微分方程的定解问题或本征值问题用变分语言表述.

Example 21.5 写出常微分方程边值问题 $x_0 < x < x_1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)y(x) = f(x), \tag{40a}$$

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1 \tag{40b}$$

的泛函形式, 即求相应的泛函, 它在边界条件(40b)下取极值的必要条件即为(40a).

Solution 既然泛函极值必要条件的微分形式就是方程(40a), 那么, 这个方程可以来自

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)y(x) - f(x)\right\} \delta y(x)\mathrm{d}x = 0.$$

现在的问题就是要把上式左端化成泛函的变分, 对于上式左端积分中被积函数的第二项和第三项, 显然有

$$\int_{x_0}^{x_1} q(x)y(x)\delta y(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\delta\int_{x_0}^{x_1} q(x)y^2(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\delta y(x)\mathrm{d}x = \delta\int_{x_0}^{x_1} f(x)y(x)\mathrm{d}x.$$

这里注意到已知函数 $q(x)$ 和 $f(x)$ 是与 $y(x)$ 的变分无关的, 因此它们在变分计算中都是常量.

对于被积函数中的第一项, 可以通过分部积分而化为

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]\delta y(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{x_0}^{x_1} p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \times \delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\delta\int_{x_0}^{x_1} p(x)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x,$$

其中用到了 $\delta y(x)\big|_{x_0} = \delta y(x)\big|_{x_1} = 0$.

综合上面的结果, 就得到

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)y(x) - f(x)\right\}\delta y(x)\,\mathrm{d}x\\ =&-\delta\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{1}{2}\left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - q(x)y^2(x)\right]\right.\\ &\qquad\left.+f(x)y(x)\right\}\mathrm{d}x\\ =&0.\end{aligned} \tag{41}$$

这就说明, 方程(40a)是泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{1}{2}\left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - q(x)y^2(x)\right] + f(x)y(x)\right\}\mathrm{d}x \tag{42}$$

取极值的必要条件. □

Example 21.6 写出偏微分方程定解问题

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) + k^2 u(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in V, \tag{43a}$$

$$u(\boldsymbol{r})\big|_{\Sigma} = f(\Sigma) \tag{43b}$$

的变分形式.

Solution 仿照上例的做法, 考虑积分

$$\iiint_V \left[\nabla^2 u + k^2 u + \rho(\boldsymbol{r})\right] \delta u \, \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

对于被积函数中的后两项, 有

$$\iiint_V k^2 u \delta u \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\delta \iiint_V k^2 u^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

$$\iiint_V \rho(\boldsymbol{r}) \delta u \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \delta \iiint_V \rho(\boldsymbol{r}) u \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

对于被积函数中的第一项, 则需要应用格林第一公式以及边界条件 $\delta u(\boldsymbol{r})\big|_{\Sigma} = 0$,

$$\iiint_V \nabla^2 u \, \delta u \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{\Sigma} \delta u \, \nabla u \cdot \mathrm{d}\Sigma - \iiint_V \nabla u \cdot \nabla(\delta u) \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{1}{2}\delta \iiint_V (\nabla u)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

因此, 原方程就转化为

$$\delta \iiint_V \left\{ \frac{1}{2}\left[(\nabla u)^2 - k^2 u^2\right] - \rho u \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$

这说明, 定解问题(43)就等价于在边界条件(43b)下求泛函

$$\iiint_V \left\{ \frac{1}{2}\left[(\nabla u)^2 - k^2 u^2\right] - \rho u \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{44}$$

的极值问题. □

Example 21.7 写出偏微分方程的本征值问题

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) + \lambda u(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{r} \in V, \tag{45a}$$

$$u(\boldsymbol{r})\big|_{\Sigma} = 0 \tag{45b}$$

的变分形式.

Solution 可将本问题看成是上例的特殊情形. 因此, 本征值问题(45)就等价于泛函

$$J[u] = \iiint_V \left\{ \left[\nabla u(\boldsymbol{r})\right]^2 - \lambda \left[u(\boldsymbol{r})\right]^2 \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{46}$$

在边界条件(45b)下的极值问题.

更进一步, 把本征值 λ 看成是拉格朗日乘子, 那么, 这个泛函极值问题又等价于泛函

$$J[u] = \iiint_V \left[\nabla u(\boldsymbol{r})\right]^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{47}$$

在边界条件(45b)和约束条件(本征函数的归一化条件)

$$J_1[u] \equiv \iiint_V \left[u(\boldsymbol{r})\right]^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 1 \tag{48}$$

下的条件极值问题.

不难证明, 这样得到的泛函的条件极值问题的确和本征值问题(45)同解. 这些本征函数正好就是泛函的极值函数, 而本征值正好是泛函的极值.

□

Sturm-Liouville 本征值问题

Example 21.8 *求泛函*

$$\begin{aligned} I[y] =& \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q(x)y^2(x)\right]\mathrm{d}x \\ &+ \frac{a_0}{2}[y(x_0)]^2 + \frac{a_1}{2}[y(x_1)]^2 \end{aligned} \tag{49}$$

在条件

$$J[y] = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\rho(x)[y(x)]^2\mathrm{d}x = 1 \tag{50}$$

下取极值的必要条件.

Solution 由一阶变分

$$\delta\left(I[y] - \lambda J[y]\right) = 0 \tag{51}$$

得

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1}\Big[p(x)y'(x)\delta y'(x) + q(x)y(x)\delta y(x) \\ &\qquad - \lambda\rho(x)y(x)\delta y(x)\Big]\mathrm{d}x \\ &+a_0 y(x_0)\delta y(x_0) + a_1 y(x_1)\delta y(x_1) = 0. \end{aligned} \tag{52}$$

分部积分

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1}\Big[-\left(p(x)y'(x)\right)' + q(x)y(x) - \lambda\rho(x)y(x)\Big]\delta y(x)\mathrm{d}x \\ &+[-p(x_0)y'(x_0) + a_0 y(x_0)]\delta y(x_0) \\ &+[p(x_1)y'(x_1) + a_1 y(x_1)]\delta y(x_1) = 0. \end{aligned} \tag{53}$$

如果我们首先选取 δy 在端点等于零

$$\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$$

则

$$\int_{x_0}^{x_1}\Big[-\left(p(x)y'(x)\right)' + q(x)y(x) - \lambda\rho(x)y(x)\Big]\delta y(x)\mathrm{d}x = 0$$

由变分法基本原理, 得微分方程

$$\left(p(x)y'(x)\right)' + [\lambda\rho(x) - q(x)]y(x) = 0 \tag{54}$$

如果 $y(x)$ 满足以上方程, 则对于任意的 δy 应有

$$\begin{aligned} &[-p(x_0)y'(x_0) + a_0 y(x_0)]\delta y(x_0) \\ &+[p(x_1)y'(x_1) + a_1 y(x_1)]\delta y(x_1) = 0. \end{aligned}$$

得边界条件

$$-p(x_0)y'(x_0) + a_0 y(x_0) = 0 \tag{55}$$

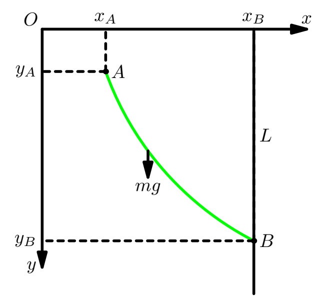
$$p(x_1)y'(x_1) + a_1 y(x_1) = 0. \tag{56}$$

□

21.5 变边值问题

在实际问题中还会遇到另一类泛函的极值问题: 极值函数在一端或两端的数值不固定.

Example 21.9 找出连接一固定点 A 到一垂线 L 的路径, 使质点在重力作用下以最少的时间由 A 到 L.



则所需要的时间仍是 $y(x)$ 的泛函.

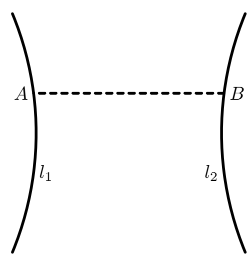
$$T=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g(y_0-y)}}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}}\,\mathrm{d}x \tag{57}$$

起点 A 的位置是给定的

$$y_A=y(x_A).$$

但是, 终点 B 的位置并不完全确定, 只是 x_B 给定.

Example 21.10 求两条不相交曲线之间的最短路径.



这里两个端点的位置都是不完全确定的.

变边值问题

第一例仍然可以归结为求泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的极值问题, 只不过边界条件需要修改.

变分计算, 得

$$\begin{aligned}\delta J[y]=&\int_{x_0}^{x_1}\delta F(x,y,y')\mathrm{d}x\\=&\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\mathrm{d}x\right)\\=&\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x\\=&0.\end{aligned}$$

首先, 不管边界条件如何变化, 总可以取变分函数

$$\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0.$$

这时仍有

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x=0.$$

由变分学基本引理得 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0.$$

依然成立.

但是, 只有这个条件还不够! 还要考虑

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_0}^{x_1}=0.$$

如果 $\delta y(x_0)=0$, 但 $\delta y(x_1)$ 任意, 得

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_0}^{x_1}=\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1}\delta y(x_1)=0.$$

还必须有

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1}=0,$$

才能保证泛函的一级变分 $\delta J[y]=0$.

Example 21.11 *在自由边值条件 (边界 Γ 上的 $u(x,y)$ 值自由) 下, 求泛函*

$$J[u]=\iint_S F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

取极值的条件.

Solution 泛函取极值的条件仍然是泛函的一级变分为 0,

$$\begin{aligned}\delta J[u]&=\iint_S\left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u+\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u_x+\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_S\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

利用 Green 公式, 将第二个面积分化为第二型线积分, 得

$$\begin{aligned}\delta J[u]=&\iint_S\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\oint_\Gamma\left[-\frac{\partial F}{\partial u_y}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial u_x}\mathrm{d}y\right]\delta u=0.\end{aligned}$$

再将沿边界的第二型线积分改写成第一型线积分的形式

$$\begin{aligned}\delta J[u]=&\iint_S\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&-\oint_\Gamma\left[\frac{\partial F}{\partial u_x}\cos(n,x)+\frac{\partial F}{\partial u_y}\cos(n,y)\right]\delta u\mathrm{d}s=0,\end{aligned}$$

这里 n 代表外法线的方向.

所以, 必要条件的微分形式是

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}=0,$$
$$\left[\frac{\partial F}{\partial u_x}\cos(n,x)+\frac{\partial F}{\partial u_y}\cos(n,y)\right]_\Gamma=0.$$

特别地, 若

$$F=\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)+G(x,y,u),$$

则边界条件为

$$[u_x\cos(n,x)+u_y\cos(n,y)]_\Gamma=\frac{\partial u}{\partial n}=0.$$

□

21.6 瑞利-里兹方法

变分法在物理学中的应用, 可以分为两个主要的方面.

- 一种应用是作为基本物理规律的表述语言.
  - 可以用哈密顿原理或其他类似的语言描述力学系统(质点、质点组······)的运动
  - 可以用费马原理描述光线在介质中的传播
  - 也可以用变分的语言描述电磁场乃至微观粒子的运动

  等等.

  在物理学的各个分支中, 支配物质运动的各种特定形式的基本规律, 无一例外地都可以表述为各自的泛函极值问题. 变分法的这种应用, 具有重要的理论意义.
- 变分法的第二种应用则体现出它的实用价值: 它为求解具体的物理问题提供了一种新的灵活手段. 在变分法的基础上, 可以建立起实用的近似解法. 本节就以常微分方程本征值问题为例介绍这种近似方法.

瑞利-里兹方法

用瑞利-里兹方法近似求解本征值问题的基本思路是:

- 首先把本征值问题转化为泛函的条件极值问题
- 然后缩小函数的范围, 用*试探函数*将泛函的条件极值问题转化为确定试探函数的参数的函数的条件极值问题.

  从实用的角度看, 要选择一个“好”的试探函数形式, 一方面便于计算, 一方面又能够足够快地、足够精确地求得本征值的近似值.

为了便于比较, 不妨举一个已知精确解的例子.

Example 21.12 *求本征值问题*

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\lambda y(x)=0, \tag{58a}$$
$$y(0)\text{ 有界},\qquad y(1)=0 \tag{58b}$$

的最小本征值.

Solution　这个本征值问题在前面已经讨论过. 它等价于泛函

$$I[y]=\int_0^1 x\,y'^2\,\mathrm{d}x \tag{59}$$

在边界条件(58b)和约束条件

$$I_1[y]\equiv\int_0^1 x\,y^2\,\mathrm{d}x=1 \tag{60}$$

下的条件极值问题.

现在就用瑞利-里兹方法来近似求解这个泛函的条件极值问题.

本征函数除了必须满足边界条件(58b)之外, 还应该具有奇偶性. 因此, 可用如下多项式序列作为试探函数

$$\begin{aligned}y_n(x)=\alpha_1\big(1-x^2\big)+\alpha_2\big(1-x^2\big)^2+\alpha_3\big(1-x^2\big)^3&\\+\cdots+\alpha_n\big(1-x^2\big)^n,&\quad n=1,2,3,\cdots\end{aligned} \tag{61}$$

这种选择可以保证近似解在 $x=0$ 处没有 "尖点", 即是使

$$\left(\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0}=0$$

取试探函数 $y_2(x)$, 即在(61)中取前两项, 代入泛函及约束条件, 得

$$I[y_2]=\int_0^1 x\,{y_2'}^2\,\mathrm{d}x=\alpha_1^2+\frac{4}{3}\alpha_1\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_2^2, \tag{62}$$

$$I_1[y_2]=\int_0^1 x\,y_2^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\alpha_1^2+\frac{1}{4}\alpha_1\alpha_2+\frac{1}{10}\alpha_2^2=1. \tag{63}$$

这可以看成是 α_1 和 α_2 的二元函数的条件极值问题, 必要条件是

$$\frac{\partial(I-\lambda I_1)}{\partial\alpha_1}=2\alpha_1+\frac{4}{3}\alpha_2-\lambda\Big(\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2\Big)=0, \tag{64}$$

$$\frac{\partial(I-\lambda I_1)}{\partial\alpha_2}=\frac{4}{3}\alpha_2+\frac{4}{3}\alpha_1-\lambda\Big(\frac{1}{5}\alpha_2+\frac{1}{4}\alpha_1\Big)=0. \tag{65}$$

这又是关于α_1和α_2的代数方程组, 有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}2-\dfrac{\lambda}{3} & \dfrac{4}{3}-\dfrac{\lambda}{4}\\ \dfrac{4}{3}-\dfrac{\lambda}{4} & \dfrac{4}{3}-\dfrac{\lambda}{5}\end{vmatrix}=0 \tag{66}$$

即

$$3\lambda^2-128\lambda+640=0. \tag{67}$$

解之得

$$\lambda=\frac{64}{3}\pm\frac{8}{3}\sqrt{34}. \tag{68}$$

这两个给出的都是λ的极值. 最小本征值的近似值

$$\bar{\lambda}_1=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{34}=5.7841\cdots, \tag{69}$$

它和精确值

$$\lambda_1=\big(2.4048\cdots\big)^2=5.7831\cdots$$

的相对误差不到2×10^{-4}. 相应地, 本征函数的近似解是

$$\bar{y}_1(x)=\alpha_1\big(1-x^2\big)+\alpha_2\big(1-x^2\big)^2, \tag{70a}$$

$$\alpha_1=2\sqrt{12-33\sqrt{2/17}}\;=\;1.6505676\cdots, \tag{70b}$$

$$\alpha_2=\sqrt{80-230\sqrt{2/17}}\;=\;1.0538742\cdots. \tag{70c}$$

为了与精确解

$$y_1(x)=\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{J}_1(\mu_1)}\mathrm{J}_0\left(\mu_1 x\right)$$

作比较, 不妨计算

$$\begin{aligned}\Delta=&\int_0^1\big[y_1(x)-\bar{y}_1(x)\big]^2x\mathrm{d}x\\ =&\,2-2\int_0^1 y_1(x)\,\bar{y}_1(x)x\mathrm{d}x\\ =&\,2\left\{1-\left[\alpha_1\frac{4\sqrt{2}}{\mu_1^3}+\alpha_2\frac{8\sqrt{2}}{\mu_1^3}\Big(\frac{8}{\mu_1^2}-1\Big)\right]\right\}\\ =&\,1.66\times10^{-5}.\end{aligned}$$

由于在多项式逼近(61)中才只取了两项, 本征值和本征函数就能达到这个精度, 这的确是令人惊异的. 可以想像, 如果取的项数更多, 得到的精度会更高.

再看一下上面得到的第二个本征值

$$\bar{\lambda}_2=\frac{64}{3}+\frac{8}{3}\sqrt{34}=36.883\cdots, \tag{71}$$

它和精确值 $\lambda_2=30.471\cdots$ 之间的误差竟超过20%！为了求得足够精确的第二个本征值, 可以增加逼近函数中的参数, 这必然以计算量的急剧增长为代价.

在实用中, 更好的办法是求解一个新的泛函条件极值问题, 它和原来的泛函条件极值问题的差别只在于排除掉第一个本征值. 这只要在原来的泛函条件极值问题中再附加上一个正交条件

$$\int_0^1 y(x)\,\bar{y}_1(x)\,x\,\mathrm{d}x=0 \tag{72}$$

即可.这样, 在这个新的泛函条件极值问题中, 最小的本征值当然就是原来的第二个本征值了. 不难想到, 如果要求更高的本征值, 应该如何处理. □