

伯努利方程

小圆滚滚

1 伯努利原理

V 丹尼尔·伯努利在1726年提出了“伯努利原理”。这是在流体力学的连续介质理论方程建立之前，水力学所采用的基本原理，其实质是流体的机械能守恒。即：动能+重力势能+压力势能=常数。其最为著名的推论为：等高流动时，流速大，压力就小。

2 伯努利方程推导

下面，将尝试去推导一下。

首先，流体作定常流动（同一流管内）时，流管中各截面的质量流量相等，也即是：

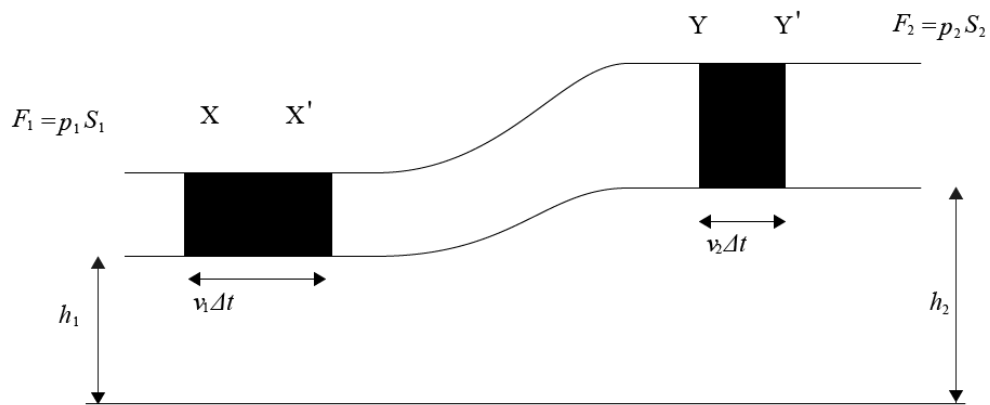
$$\rho \times S \times V = C_1$$

理想流体作定常流动时，流管中各截面的体积流量相等，也即是：

$$S \times V = C_2$$

流体中，全压=静压+动压（后面会分类），在温度，密度等条件不变时，全压也不变。质量（ ρV ）流量相等，同一流体，各截面体积流量相等。V 因此，便有截面处大时，流速小；截面处小时，流速大。

以流管中XY段的理想流体为研究对象



在短时间 $\delta t(\Delta t \rightarrow 0)$ 内，流体XY移至 $X'Y'$

外力的总功： $A = p_1 S_1 \cdot v_1 \Delta t - p_2 S_2 \cdot v_2 \Delta t = p_1 V - p_2 V$

上式中 v 是速度， V 是体积。

动能的增量: $\Delta E_k = \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

势能的增量: $\Delta E_p = m_2gh_2 - m_1gh_1 = mgh_2 - mgh_1$

这里解释一下, 功等于力乘以力的位移, 也即是: $A_1 = F_1v_1\Delta t = p_1S_1\Delta t$

根据功能原理: $A = \Delta E_k + \Delta E_p$

$$\Rightarrow p_1V - p_2V = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_2 - mgh_1$$

移项得:

$$p_1V + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = p_2V + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

两边同除以体积V

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2$$

X、Y两截面在流管中的位置选取上是任意的

对任意截面有 $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{constant}$ (常量)

其中:

$\frac{1}{2}\rho v^2$ 单位体积流体的动能——动压强

ρgh 单位体积流体的重力势能

p 单位体积流体的压强能

} 静压强

这就是伯努利方程。